Lösung Rätsel 5

Der König gibt dem verurteilten noch eine letzte Chance, sein Leben zu retten. Der Gefangene erhält Gefangene 50 weiße und 50 schwarze Kugeln, die er beliebig auf zwei gleich aussehende Gefäße verteilen darf. Am nächsten Tag muss er ein Gefäß zufällig auswählen und eine Kugel daraus ziehen. Bei Schwarz wird er hingerichtet, bei Weiß begnadigt.

Wie muss der Gefangene die Kugeln verteilen, damit seine Chancen möglichst hoch sind?

∧ Lösung

Von Roman Meisl:

In ein Gefäß eine weiße Kugel, in das andere alle restlichen Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gefangene begnadigt wird, ist dann 0.5*1 + 0.5*49/99 = 74,75%

Von Gerald Tarnai:

Er gibt in Gefäß A s schwarze Kugeln und w weiße Kugeln (0 ≤ s ≤50.0 ≤ ≤50). Dann sind in Gefäß B (50-s) schwarze und (50–w) weiße Kugeln.

$$P(w) = P(A \vee B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{s+w} + \frac{1}{2} \cdot \frac{50-w}{100-s-w}$$

Der Ausdruck

$$\frac{w}{s+w} + \frac{50-w}{100-s-w}$$

soll also möglichst groß werden.

$$\frac{w(100-s-w)+(50-w)(s+w)}{(s+w)(100-s-w)} = \frac{100w - sw - w^2 + 50s - sw + 50w - w^2}{100s + 100w - s^2 - sw - sw - w^2} =$$

$$= \frac{50(s+3w) - 2w(s+w)}{100(s+w) - (s+w)^2}$$

$$= \frac{50(s+3w) - 2w(s+w)}{99(s+w)}$$

Der Zähler soll also möglichst groß und der Nenner möglichst klein sein.

Nenner: s + w minimal; Zähler: w minimal (wegen Abzug). Wenn in A keine weiße Kugel ist, dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit < 50%.

Probieren:

1. s+w = 1 → s=0, w=1

$$P(w) = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.\frac{49}{99} = 0,\overline{74} = 74,747\%$$

2. Für jeden höheren Wert von s+w ist die Wahrscheinlichkeit unter 50%.